УДК 530.182:624

М. А. Князев, доктор физико-математических наук, доцент (БНТУ)

ФЛУКТУАЦИИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

Вычислена поправка первого порядка по теории возмущений к величине однородной деформации стержня на стадии разупрочнения. Использована упругопластическая модель, в которой текучесть материала зависит не только от напряжения и деформации, но и от градиента деформации второго порядка. Диаграмма материала аппроксимирована квадратичной функцией. Проанализировано полученное решение. Предложен способ обобщения на случай существенно нелинейных задач.

A first order correction to the uniform state of deformation of bar in a case of disstrengthening is calculated by perturbation method. The elastic-plastic model is applied. In this model a yield strength of material depends not only on strength and deformation but on a second order gradient of deformation also. A squared approximation for a diagram of material is used. The obtained solution is analyzed. Epy way for generalization on a case of essentially nonlinear case is suggested.

Введение. Нелинейные модели находят все более широкое применение при изучении развития и распространения деформаций в композитных материалах (например, в бетоне или геоматериалах). К числу таких моделей относится нелинейная упругопластическая модель, в которой текучесть материала определяется функцией, зависящей не только от напряжения и деформации, но также и от градиента деформации второго порядка [1–3]. В данной модели локальная деформация заменяется некоторой усредненной деформацией по объему структурной ячейки материала, размеры которой считаются малыми в сравнении с характерным размером задачи. Пластическая деформация и последующее разрушение рассматриваются как две последовательные составляющие одного процесса. На начальной стадии этот процесс обусловлен движением дислокаций в кристаллических зернах материала, а затем происходит зарождение и развитие микродефектов. При этом интенсивность потока дислокаций достигает максимально возможного значения, что приводит к возникновению аннигиляции дислокаций и процессу дисклинации зерен с образованием между ними пор. В результате отмечается разупрочнение материала.

В указанной модели применительно к задаче о динамике распространения деформаций в одномерном стержне на стадии разупрочнения, когда при уменьшении напряжений деформации растут, уравнение для возмущения деформации ε относительно однородного состояния $\varepsilon_{од}$ можно представить в виде [4, 5]

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} + k\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} + \delta^2\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial x^4} = \frac{1}{2}f\frac{\partial^2(\varepsilon)^2}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где δ – малый безразмерный параметр, характеризующий неоднородность внутренней структуры материала; k и f – коэффициенты аппроксимации для диаграммы материала. Поскольку на стадии разупрочнения происходит увеличение амплитуды деформаций, то становится необходимым учитывать нелинейные члены в диаграмме материала. Уравнение (1) записано в случае квадратичного приближения для диаграммы материала $\sigma_s(\varepsilon_{од})$:

$$\frac{d\sigma_s(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -k + f\varepsilon,$$

причем $k > 0$, $f < 0$, так как рассматривается нисходящая ветвь диаграммы. В линейном приближении функция, описывающая возмущение деформаций относительно однородного состояния, представляет собой плоскую волну. Вызывает интерес вопрос о влиянии нелинейности уравнения (1) на поведение решения, соответствующего ему линейного уравнения. Будем считать, что коэффициент f достаточно мал, и можно применить теорию возмущений. Это возможно, если зависимость, описывающая ход нисходящей ветви диаграммы материала, не очень сильно отличается от линейной.

Основная часть. Будем искать интересующее нас решение в виде распространяющихся волн стационарного профиля. Тогда уравнение (1) можно представить в виде

$$\left(k+v^2\right)\frac{d^2\varepsilon}{dz^2} + \delta^2\frac{d^4\varepsilon}{dz^4} = f\left[\varepsilon\frac{d^2\varepsilon}{dz^2} + \left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2\right], \qquad (2)$$

где $z = x - vt$, v – скорость распространения волны. В соответствии со сделанным выше предположением правую часть уравнения (2) можно рассматривать как малую поправку к линеаризованному уравнению

$$\left(k+v^2\right)\frac{d^2\varepsilon_0}{dz^2} + \delta^2\frac{d^4\varepsilon_0}{dz^4} = 0,$$

решение которого имеет вид [6]

$$\varepsilon_0(z) = C_1\cos(pz) + C_2\sin(pz), \quad (3)$$

где $p = \sqrt{(k+v^2)/\delta^2}$, а C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, значения которых могут быть найдены с использованием граничных условий задачи.

Если представить решение уравнения (2) в виде ряда по малому параметру f

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0(z) + f\varepsilon_1(z) + f^2\varepsilon_2(z) + \ldots, \quad (4)$$

то, последовательно применяя теорию возмущений, можно построить бесконечную систему линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которую можно в принципе определить все функции ε_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Для этого необходимо подставить соотношение (4) в уравнение (2) и приравнять к нулю выражения при одинаковых степенях параметра f.

Вычислим поправку первого порядка. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\delta^2\frac{d^4\varepsilon_1}{dz^4} + \left(k+v^2\right)\frac{d^2\varepsilon_1}{dz^2} = \varepsilon_0\frac{d^2\varepsilon_0}{dz^2} + \left(\frac{d\varepsilon_0}{dz}\right)^2. \quad (5)$$

Общее решение данного уравнения определяется суммой общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (5), известно и оно имеет вид, аналогичный соотношению (3)

$$\varepsilon_{1,\text{о.о}}(z) = A_1\cos(pz) + A_2\sin(pz), \quad (6)$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования. Частное решение неоднородного уравнения (5) можно построить при помощи метода вариации произвольных постоянных [7]

$$\varepsilon_{1,\text{ч.н}}(z) = \cos(pz)\int\frac{\sin(pz)\varphi(z)}{W}dz + \sin(pz)\int\frac{\cos(pz)\varphi(z)}{W}dz, \quad (7)$$

где $\varphi(z)$ – правая часть уравнения (5); вронскиан системы функций, определяемых соотношением (3), будет постоянной величиной, так как уравнение (5) не содержит производных первой степени и $W = p$. Окончательно для частного решения неоднородного уравнения (5) получаем следующее выражение:

$$\varepsilon_{1,\text{ч.н}}(z) = \frac{C_1^2 - C_2^2}{3}\cos(4pz) + \frac{C_1C_2}{3}\sin(4pz). \quad (8)$$

Теперь решение уравнения (5) с точностью до членов первого порядка по f можно записать в виде

$$\varepsilon'(z) = C_1\cos(pz) + C_2\sin(pz) + fA_1\cos(pz) + fA_2\sin(pz) + f\frac{C_1^2 - C_2^2}{3}\cos(pz) + f\frac{C_1C_2}{3}\sin(pz). \quad (9)$$

Заключение. Вычисление общего решения уравнения (2) с точностью до первого порядка по параметру разложения показывает, что это решение в целом носит осциллирующий характер. В линейном приближении для диаграммы материала возмущение деформации относительно однородного состояния также описывается осциллирующей функцией (плоской волной). Учет нелинейности диаграммы материала в рамках теории возмущений приводит к тому, что в первом порядке малости спектр колебаний становится более сложным, появляются высшие гармонические составляющие, но колебательный характер зависимости по-прежнему имеет место. Теперь наряду с колебаниями, определяемыми основной модой с аргументом pz, решение содержит также колебания, описываемые четвертой гармонической составляющей. Следовательно, учет нелинейности не вносит существенных поправок в упомянутый выше механизм протекания пластической деформации и появление микродефектов, хотя ясно, что теперь в процессе разупрочнения материала появляется дополнительное взаимодействие между ячейками.

Отсутствие второй и третьей гармонических составляющих указывает на то, что по крайней мере в первом приближении по параметру f учет нелинейного квадратичного характера диаграммы материала не приводит к возбуждению этих гармоник и они не участвуют в переносе энергии при формировании и распространении деформации. Даже если в системе в силу случайных причин появятся колебания с аргументом $2pz$ или $3pz$, то они будут затухать достаточно быстро по сравнению с характерным временем распространения колебаний, определяемым соотношением (3).

Дальнейшее изучение локализации деформаций связано с рассмотрением существенно нелинейных процессов, т. е. таких процессов, при которых вследствие того, что амплитуда взаимодействующих волн очень велика, использование теории возмущений оказывается недостаточным [8]. Возникает необходимость исследования решений не в виде распространяющихся волн, а в виде локализованных волн.

Проведенный в работах [4, 5] в рамках такого подхода анализ показал, что при попытке построить простейшее локализованное решение уравнения (1) в виде одиночного солитона не удается избежать характерного осциллирующего поведения соответствующего состояния, описывающего деформацию. Даже в случае, когда параметр f достаточно велик, волновой характер уравнения (1) оказывается преобладающим над нелинейным поведением диаграммы материала. Формальное построение одиночного солитона для уравнения (1) приводит к тому, что он оказывается нелокализованной в пространстве комплексно-значной функцией, что невозможно в принципе. Следовательно, в уравнении (1) отсутствует баланс между нелинейностью и дисперсией и с точки зрения теории нелинейных волн оно оказывается неинтегрируемым [9]. Однако для случая решения в виде связанного состояния двух одиночных солитонов возможно построить решение, которое будет описываться действительной функцией. Хотя уравнение (1) является нелинейным и простое суммирование двух одиночных солитонов невозможно, тем не менее, можно подобрать такие значения параметров решения, при которых мнимые составляющие будут компенсировать друг друга.

Возможно дальнейшее обобщение результатов, полученных в работах [4, 5]. Для того чтобы установить в указанной модели баланс между дисперсией и нелинейностью, требуется учесть в упругопластической модели и диссипативные процессы, которые имеют место при распространении деформаций. В этом случае удается построить решение в виде локализованного односолитонного состояния без дополнительных условий.

Литература

1. Kukudzhanov, V. Modelling of the strain softening and localization in dynamical problems / V. Kukudzhanov // J. Phys. IV (France). – 1998. – Vol. 8, № PR8. – P. 207–214.

2. Кукуджанов, В. Н. О структуре полос локализации деформации в нелокальной теории пластичности при динамическом нагружении / В. Н. Кукуджанов // Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 104–114.

3. Кукуджанов, В. Н. Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций / В. Н. Кукуджанов // Механика твердого тела. – 1999. – № 5. – С. 72–87.

4. Мягков, Н. Н. Моделирование локализации деформации в задаче о динамике разупрочняющегося стержня / Н. Н. Мягков // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т. 25, вып. 20. – С. 48–53.

5. Мягков, Н. Н. О динамической локализации деформации в разупрочняющемся стержне / Н. Н. Мягков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 3. – С. 28–32.

6. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

7. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1955. – 656 с.

8. Косевич, А. М. Введение в нелинейную физическую механику / А. М. Косевич, А. С. Ковалев. – Киев: Наукова думка, 1989. – 304 с.

9. Инфельд, Э. Нелинейные волны, солитоны и хаос / Э. Инфельд, Дж. Роуландс. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.

Поступила 27.02.2012